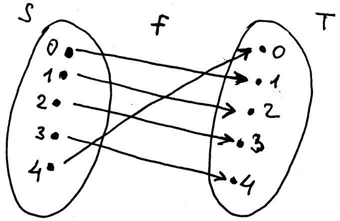
F-je i binarne relacije

Funkcija $f: S \to T$ preslikava svaki elemenat $s \in S$ na tačno jedan element od T, kojeg označavamo sa $f(s)$.

npr.

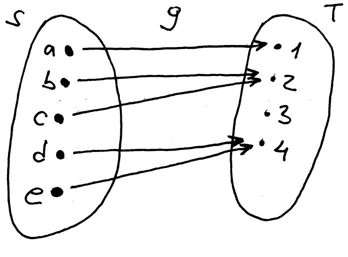


$f: \{0,1,2,3,4\} \to \{0,1,2,3,4\}$

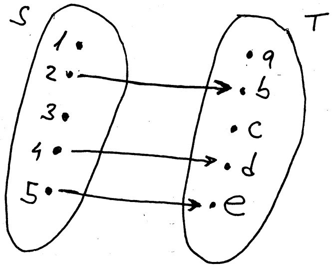
n	$f(n)$
0	1
1	2
2	3
3	4
4	0

f je f-ja

Odgovoriti na pitanje da li su g i h f-je?



g jest f-ja



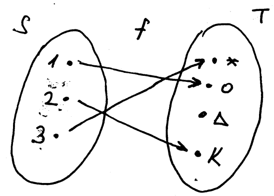
h nije f-ja (zašto?)

$f(n) = n^2$ je f-ja sa $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{N}$

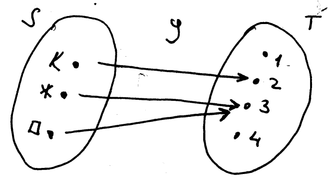
Funkcija f je jedan-na-jedan (1-1 ili injektivna f-ja) ako se nikad dva različita elementa ne preslikavaju na isto mjesto tj.

$$s_1 \neq s_2 \Rightarrow f(s_1) \neq f(s_2)$$

npr.



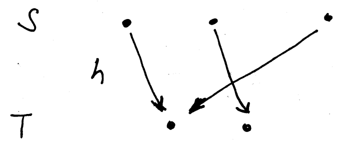
f-ja f je 1-1



f-ja g nije 1-1

F-ja f je na (ili sirjektivna f-ja) ako elementi od S pogađaju sve elemente od T, tj. $\forall (t \in T)\, \exists (s \in S)\ f(s) = t$

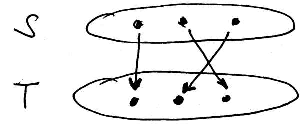
npr. Iz prethodnog primjera f-je f i g nisu sirjektivne.



h je na f-ja

F-ja je bijektivna ako je 1-1 i na.

npr.



Binarna relacija na skupu S je podskup od $S \times S$.

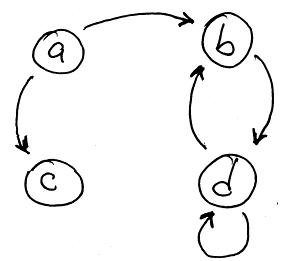
npr. $S = \{a, b, c\}$

$S \times S = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$

$R = \{(a,a), (b,c), (c,b)\}$ je jedna binarna relacija na S.

Za konačan skup S relaciju možemo predstaviti kao "orjentisan graf".

npr. $R=\{(a,b),(a,c),(b,d),(d,b),(d,d)\}$



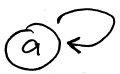
$S=\{a,b,c,d\}$

vrhovi: a, b, c, d

ivice $R \in S\times S$

Relacija $R \subseteq S\times S$ je

- refleksivna, ako je $(a,a)\in R$ za $\forall(a\in S)$



- simetrična, $\forall(a,b\in S)\ (a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$

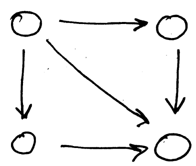
ako je $a \to b$ kadgod je $a \leftarrow b$

- tranzitivna, $\forall(a,b,c\in S)\ ((a,b)\in R \wedge (b,c)\in R) \Rightarrow (a,c)\in R$

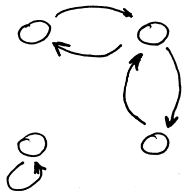
ako je $a \to c$ kad god je

$a \to b$; $b \to c$

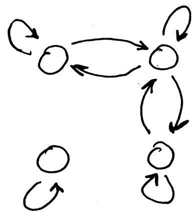
npr.



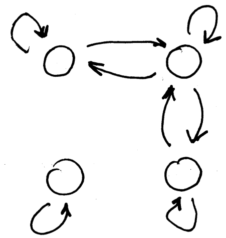
tranzitivna, nije simetrična, nije refleksivna



simetrična, nije refleksivna, nije tranzitivna



refleksivna i simetrična, nije tranzitivna



refleksivna, tranzitivna i simetrična

Relacija koja zadovoljava sve tri spomenute osobine (refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost) zove se RELACIJA EKVIVALENCIJE.

5. Provjeriti bijektivnost sljedećih f-ja:

$f_1: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f_1(x)=x^2$

$f_2: \mathbb{R}\to[0,+\infty),\quad f_3(x)=x^3$.

Rj. $f_1: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f_1(x)=x^2$

1-1 (injektivnost): $\forall(x_1,x_2\in\mathbb{R})(x_1\neq x_2 \Rightarrow f_1(x_1)\neq f_1(x_2))$

uzmimo $x_1=1$ tad $f_1(1)=1$

za x_2 uzmimo -1 tad $f_1(-1)=1$. Našli smo x_1 i x_2 za koje vrijedi $x_1\neq x_2$ ali je $f_1(x_1)=f_2(x_2)$.

F-ja nije 1-1.

na (sirjektivnost): $\forall(x\in\mathbb{R})\ \exists(y\in\mathbb{R})\ \ y=f(x)=x^2$

$y=x^2$

Ako za y uzmem -1 (ili bilo koji negativan broj) tad ne postoji realan broj x za koji važi $y=x^2$ ($-1\neq x^2$ za $\forall x\in\mathbb{R}$)

F-ja nije na.

F-ja f_1 nije ni injektivna ni sirjektivna pa f-ja nije ni bijektivna.

$f_2:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$, $f_3(x)=x^3$

Odmah primjetimo da f_2 nije f-ja. (negativne brojeve preslikava u negativne što nije dozvoljeno po definiciji f_2)

Kako f_2 nije f-ja bijektivnost se ne može ni razmatrati.

6. Dokazati da je f-ja $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x)=\frac{2+x}{3-x}$ bijektivna i naći njenu inverznu f-ju.

Rj. $f:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f(x)=\frac{2+x}{3-x}$

1-1 (injektivnost): $\forall(x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{-3\})\ \ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

1-1 možemo napisati i u drugačijem obliku

$\forall(x_1,x_2\in\mathbb{R}\setminus\{-3\})\ \ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

pa pretpostavimo da je $f(x_1)=x_2$)

$\Rightarrow \frac{2+x_1}{3-x_1}=\frac{2+x_2}{3-x_2}$ kako je $3-x_1$ i $3-x_2\neq 0$ to smijemo $/\cdot(3-x_1)(3-x_2)$

$(2+x_1)(3-x_2)=(2+x_2)(3-x_1)$

$6-2x_2+3x_1-x_1x_2=6-2x_1+3x_2-x_1x_2$

$3x_1-2x_2=3x_2-2x_1 \Rightarrow 5x_1=5x_2 \Rightarrow x_1=x_2$

pokazali smo da $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

što znači f-ja f je injektivna. ...(*)

na (sirjektivnost): $\forall(y\in\mathbb{R}\setminus\{-1\})\ \exists(x\in\mathbb{R}\setminus\{3\})\ \ y=f(x)=\frac{2+x}{3-x}$

$y=\frac{2+x}{3-x}$ $/\cdot(3-x)$ smijemo množiti zato što je $x\neq3$

$y(3-x)=2+x$

$3y-yx=2+x$

$-yx-x=2-3y$

$x(-y-1)=2-3y$ $/:(-y-1)$ smijemo dijeliti zato što je $y\neq-1$

$x=\frac{2-3y}{-y-1}$

koju god vrijednost realnog broja y da uvrstimo u $x=\frac{2-3y}{-y-1}$ dobićemo realan broj x. ($y\neq-1$)

($x\neq3$ zato što ne bi mogli ni formirati izraz $x=\frac{2-3y}{-y-1}$ u suprotnom)

f-ja f je sirjektivna ...(**)

Iz (*) ; (**) $\Rightarrow$ f-ja f je bijektivna.

Inverzna f-ja $f^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}\setminus\{3\}$ ima osobinu $f^{-1}(f(x))=x$

tj. $f^{-1}(y)=x \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{2-3y}{-y-1}$

što je trebalo naći.

7. Dat je skup $A=\{a,b,c,d\}$ i u njemu relacije:

$\rho_1=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$,

$\rho_2=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b),(b,c)\}$,

$\rho_3=\{(a,a),(b,b),(d,d),(a,c),(c,a)\}$,

$\rho_4=A^2$.

Ispitati refleksivnost (R), simetričnost (S) i tranzitivnost (T) ovih relacija.

Rj. ρ_1 jest R, jest S i jest T.

ρ_2 jest R, nije S ($(a,b)\in\rho_2$ ali $(b,a)\notin\rho_2$) i nije T

($(a,b)\in\rho_2 \wedge (b,c)\in\rho_2$ ali nije $(a,c)\in\rho_2$)

ρ_3 nije R ($(c,c) \notin \rho_3$), jest S i nije T

$((c,a) \in \rho_3 \wedge (a,c) \in \rho_3$ ali $(c,c) \notin \rho_3)$

ρ_4 jest R, jest S i jest T.

8. U skupu $\mathbb{Z}$ je definisana relacija ρ sa

$x \rho y \Leftrightarrow 3 \mid (x-y)$.

Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije na $\mathbb{Z}$.

Rj. refleksivnost: $\forall (x \in \mathbb{Z})\ x \rho x$

$x \rho x \Leftrightarrow 3 \mid (x-x) \Leftrightarrow 3 \mid 0 \Leftrightarrow \exists (k \in \mathbb{Z})\ 3 \cdot k = 0$

što je tačno

ρ jest refleksivno

simetričnost: $\forall (x,y \in \mathbb{Z})\ x \rho y \Rightarrow y \rho x$

$x \rho y \Rightarrow 3 \mid (x-y) \Rightarrow \exists (k \in \mathbb{Z})\ 3 \cdot k = x-y \Rightarrow$

$\exists (k \in \mathbb{Z})\ (-3) \cdot (-k) = x-y \Rightarrow (-3) k = y-x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (g \in \mathbb{Z})\ 3 \cdot g = y-x \Rightarrow 3 \mid y-x \Rightarrow y \rho x$

ρ jest simetrično

tranzitivnost: $\forall (x,y,z \in \mathbb{Z})\ x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

$x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow 3 \mid x-y \wedge 3 \mid y-z \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (k_1, k_2 \in \mathbb{Z})\ 3 \cdot k_1 = x-y \wedge 3 \cdot k_2 = y-z \Rightarrow$

$3k_1 + 3k_2 = x-y+y-z \Rightarrow 3(k_1+k_2) = x-z \Rightarrow 3 \mid x-z$

$\Rightarrow x \rho z$

ρ jest refleksivna

ρ jest relacija ekvivalencije